UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS, 525401

Análisis Funcional y Aplicaciones I

Segundo Semestre de 2008 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (Teorema de Hahn-Banach sobre $\mathbb{C}$). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $p : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$p(\alpha\, x) \,=\, |\alpha|\, p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \,\leq\, p(x) \,+\, p(y) \qquad \forall\, \alpha \,\in\, \mathbb{C}\,,\; \forall\, x\,,\, y \,\in\, X\,.$$

   Además, sean S un subespacio de X y $f : S \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que

$$|f(x)| \;\leq\; p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, S\,.$$

   Demuestre que f puede extenderse a un funcional lineal $F : X \to \mathbb{C}$ tal que

$$|F(x)| \;\leq\; p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

2. (Aplicación simple del Teorema de Hahn-Banach). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

   a) Dados un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de N vectores linealmente independientes de X y $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \mathbb{C}$, pruebe que existe $F \in X'$ tal que $F(x_j) \,=\, a_j$ para todo $j \in \{1, ..., N\}$.

   b) Utilice a) para probar que todo subespacio Y de dimensión finita admite un suplemento topógico.

3. Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, ..., m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

4. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z, X)$. Demuestre que $(AB)' \,=\, B'\, A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} \,=\, (A^{-1})'$.

5. (Inverso a izquierda). Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $N(T) \,=\, \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $S\, T \,=\, I : E \to E$.

   b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en F.

6. (APLICACIÓN DE REFLEXIVIDAD). Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \to F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E. Pruebe que si E es reflexivo entonces
$$N(A)^{\perp} \,=\, \overline{R(A^*)}\,.$$

7. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL $T : H \to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que
$$\langle Tv - Tw, v - w\rangle \,\geq\, \alpha\, ||v-w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv - Tw||_H \,\leq\, M\, ||v - w||_H \quad \forall\, v,\, w \in H\,.$$

   a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu \,=\, f$.

   b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n \in H_n$ *tal que*
$$\langle Tu_n, v_n\rangle \,=\, \langle f, v_n\rangle \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$
   Pruebe que
$$||u - u_n||_H \,\leq\, \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H\,.$$

   IND.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv := v - \rho\,(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

8. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

   IND.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

9. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.

10. Sea X un espacio vectorial normado.

   a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

   b) Sea $S := \{x \in X : \quad ||x|| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.

11. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio
$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v \,:=\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \,\in\, L^2(\Omega) \right\}$$
   provisto del producto escalar
$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v \cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}\, v\ \mathrm{div}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \;\mathrm{div}\, w\, dx = \int_\Omega g \cdot w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

IND.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

12. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \;\mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \;\mathrm{rot}\, w\, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g\, \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: Notar que $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\mathrm{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

13. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \le C\, ||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V\,.$$

IND.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

14. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = t^j \ \forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

IND.: Para todo $j \in \{0,1,...,n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

15. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.

a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.

b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y',X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y',X'), \mathcal{L}(X,Y))$.

16. Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{array}{rll} -(au')' + bu & = f & \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) & = 0 & , \end{array} \tag{1}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

17. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

18. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X.

a) Demuestre que $M =^0 (M^0)$.

b) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.

19. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

20. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{3}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M ||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in I.$$

Demuestre que (3) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

IND.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

21. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

22. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\, \alpha_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n$ converge en H.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

23. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2\, dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden m, como

$$H^m(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ , tal que}$$

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx \,=\, (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi\,\in\,C_0^\infty(\Omega)\,\Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u \,=\, g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} \,:=\, \left\{\sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)}\right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} \,:=\, \int_\Omega uv\,dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f\,\in\,(H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha\,\in\,L^2(\Omega)$, $|\alpha|\le m$, tales que $f(v)\,=\,\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega f_\alpha\,\partial^\alpha\,v\,dx \quad \forall\,v\in H^m(\Omega)\,.$

24. Se dice que un espacio de Banach X es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo $\epsilon\,>\,0$ existe $\delta\,>\,0$ tal que

$$(\,x,y\,\in\,X\,,\;||x||\le 1\,,\;||y||\le 1 \quad \text{y} \quad ||x-y||\,>\,\epsilon\,)\;\Rightarrow\;\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\,<\,1-\delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

25. Sean X,Y espacios de Hilbert y considere $A\in\mathcal{L}(X,Y)$.

   a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

   b) Suponga que existe $\beta\,>\,0$ tal que

   $$\inf_{z\,\in\,N(A)}\,||x-z||\,\le\,\beta\,||Ax|| \quad \forall\,x\,\in\,X\,.$$

   Demuestre que $R(A)\,=\,N(A^*)^\perp$.

   c) Pruebe que $A^*\,=\,R_X\,A'\,R_Y^{-1}$, donde $R_X\,:\,X'\to X$ y $R_Y\,:\,Y'\to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A')\,=\,N(A^*)^\perp$.

26. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty}T_n(x)$ existe $\forall x\,\in\,X$. Pruebe que existe $T\,\in\,\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T_n(x)\to T(x) \quad \forall x\in X$.

   IND.: Aplicar TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

27. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\,H_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1}\subset H_n\;\forall\,n\,\in\,\mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}}H_n$ es denso en H. Sea $B\,:\,H\times H\to\mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f\in H'$ existe una única sucesión $\{\,u_n(f)\,\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq H$ tal que

   $$u_n(f)\,\in\,H_n \quad , \quad B(u_n(f),v_n)\,=\,f(v_n) \quad \forall\,v_n\,\in\,H_n\,,$$

   y $||u_n(f)||\,\le\,C_0\,||f||\,\forall\,n\in\mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f\in H'$ existe un único $u(f)\,\in\,H$ tal que

   $$B(u(f),v)\,=\,f(v) \quad \forall\,v\,\in\,H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall\, f \in H' .$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall\, v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

28. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left\{ ||x||^2 + ||y||^2 \right\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

29. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I+A)$ es invertible y que

$$(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X,X)$. Muestre también que

$$||(I+A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$

30. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x,y) \in X \times Y : \quad x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

31. (LEMA DE LAX-MILGRAM GENERALIZADO). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u,v) \in H_1 \times H_2.$$

b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\mathop{sup}_{\substack{v\in H_2\\ v\neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u\in H_1} |B(u,v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $\quad ||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

32. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.

    DEFINICIÓN. *Se dice que* $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ *es la* CLAUSURA *de* T, *si*:

    i) $\overline{T}$ *es un operador lineal cerrado*

    ii) $\overline{T}$ *es una extensión de* T

    iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ *es cualquier operador con las propiedades* i) y ii), *entonces* $\tilde{T}$ *es una extensión de* $\overline{T}$.

    Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

33. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados u_1, u_2, $y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\, (1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds = y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\,. \quad (4)$$

    i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.

    ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (4) tiene una única solución.

34. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ y $B \in \mathcal{L}(X, X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|B_n(x) - B(x)\|_X = 0$ para todo $x \in X$. Razone por contradicción y luego aplique el teorema del acotamiento uniforme para probar que

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n\, K - B\, K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 0 \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(X, X)\,.$$

35. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

    i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}\,(X, Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.

    ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}\,(X, Y)$ y $K \in K\,(Y, Z)$, entonces KA también es compacto.

36. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

37. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{ F_n \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{ y_n \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{ \lambda_n \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\mathop{sup}_{n \in \mathbf{N}} ||F_n||_{X'} \,<\, +\infty \quad , \quad \mathop{sup}_{n \in \mathbf{N}} ||y_n||_Y \,<\, +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \,<\, +\infty \, ,$$

y además

$$A\,x \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \,\in\, X \, .$$

Demuestre que A es compacto.

38. **i)** Sea $p > 1$ y considere el operador $K \,:\, l_p \to l_p$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \;=\; (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\; (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \,\in\, l_p \, .$$

Demuestre que K es compacto.

ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} \,:=\, \{\, F \,\in\, (\,\mathcal{L}(X,Y)\,)' \,: \quad F(K) \,=\, 0 \quad \forall\, K \,\in\, K(X,Y)\,\} \, .$$

Pruebe que $\mathcal{H} \,=\, (\frac{\mathcal{L}(X,Y)}{K(X,Y)})'$.

39. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,\pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas p_j, $q_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall\, t \in [0,\pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \,+\, \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X \, .$$

Demuestre que $A \,\in\, \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

40. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i \,:\, H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la Desigualdad de Gårding si existen $\alpha \,>\, 0$ y una forma bilineal acotada $K \,:\, H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \,\geq\, \alpha\, ||v||_H^2 \,-\, K(v,v) \qquad \forall\, v \,\in\, H \, .$$

Dado $F \,\in\, H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar* $u \,\in\, H$ *tal que*

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H \, . \tag{5}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \,\in\, H'$ si y solo si $u \,=\, 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v, Sv) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \;-\; K(v, Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SOLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

41. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto SI Y SÓLO SI A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y.

42. **a)** Sea $\Omega = (0, 1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall\, f,\, g \,\in\, X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Considere la sucesión $\{\, x_n\,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)\ \forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| \;=\; 1 \quad \forall\, n \,\in\, \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} \langle\varphi, x_n\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

43. DEFINICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador* NOLINEAL. *Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que*

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \;-\; (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\ ,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u, \lambda), (u, \lambda)) \;\geq\; C_0\, ||\lambda|_Q^2 \quad \forall\, (u, \lambda) \,\in\, X\,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u - v) \;-\; (A(v))\,(u - v) \;\geq\; C_1\, ||u - v||_H^2 \;+\; R(u, v)\,,$$

donde

$$|R(u, v)| \;\leq\; C_2\,\{\, 1 \;+\; ||u||_H \;+\; ||v||_H\,\}\, ||u - v||_V\ .$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \;:=\; (A(u))\,(v) \;+\; B((u,\lambda),(v,\mu))\;,$$

satisface la propiedad (S).

44. **a)** Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

    b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

    c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} :\ f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p\, dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) \;:=\; \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \in L^p(\Omega)\;, i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \;=\; -\int_\Omega g_i \phi\, dx \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \;:=\; ||u||_{L^p(\Omega)} \;+\; \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Puede probarse que $(\,W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}\,)$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

45. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\{Tx_n^{(1)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.

46. Sean a, $b \in \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

47. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\, dx \;=\; a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,ds = 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \lambda \int_\Omega v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma g v\,ds\,,$$

$$\mu \int_\Omega u\,dx = \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

48. **a)** Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x$. Demuestre que $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

    b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x$ y $\limsup ||x_n|| \leq ||x||$. Pruebe que $x_n \to x$.

49. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

    IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in X : \ ||x|| \leq n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

50. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.* En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

    a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2+\beta^2)^{p/2}\ \forall\,\alpha,\beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de *Clarkson*:

    $$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_{L^p(\Omega)}^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2}\left\{||f||_{L^p(\Omega)}^p + ||g||_{L^p(\Omega)}^p\right\} \quad \forall\, f,g \in L^p(\Omega).$$

    b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

51. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w;\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: *Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u;u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in V\,. \tag{7}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \;\geq\; \alpha\, ||v||_V^2 \qquad \forall\, v, w \,\in\, V\,.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) \,-\, a(w_2; u, v)| \;\leq\; C_0\, ||w_1 \,+\, w_2||_V\, ||u||_V\, ||v||_V\, ||w_1 \,-\, w_2||_V\,.$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $||\, F\, ||_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

52. **a)** El Teorema del Punto Fijo de Brouwer establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle\, \cdot, \cdot\, \rangle$ y norma $||\cdot||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u\rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$-\Delta\, \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx \,=\, 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q \,:=\, L_0^2(\Omega) \,:=\, \left\{ q \,\in\, L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx \,=\, 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \,+\, b(\mathbf{v}, p) \,&=\, f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, H \\ b(\mathbf{u}, q) \,&=\, 0 \quad \forall\, q \,\in\, Q\,, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \,:=\, \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx \,+\, \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\, dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) \,:=\, -\int_\Omega p\, \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) \,=\, \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx\,.$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{\mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}$. Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{10}$$

d) Además de lo dicho en **c)**, suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha ||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

53. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f \, g| \, dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)} \, ||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Ahora, para un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m, p), como

$$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} .$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

54. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^*y \in X$ es el único elemento (dado por Teorema de Representación de Riesz) tal que $\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \quad \forall\, x \in X$.

    a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.

    b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

    c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf\limits_{z \in N(A)} ||x - z|| \le \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

    d) Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.

55. Sea X un espacio vectorial normado.

    a) Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.

    b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

56. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \to X$, y sean S, T, subconjuntos de X y X', respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S^o y $S^\perp$, y entre ${}^oT$ y $R_X(T)$.

57. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U,V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\, ||F||_{U'} \le ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P).$$

58. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

    Ind.: Hacer una demostración alternativa utilizando el Teorema del Grafo Cerrado en vez del Teorema de Banach-Steinhaus.

59. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u,\lambda),(v,\mu)) := a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu) \quad \forall\,(u,\lambda),\ (v,\mu) \in H \times Q\,.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v,v) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \quad \forall\, v \in H\,.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\mathop{sup}_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v,\lambda)}{||v||_H} \geq \beta ||\lambda||_Q \quad \forall\, \lambda \in Q\,.$$

Demuestre que B satisface la Desigualdad de Gårding Generalizada.

60. Sea $(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v,\varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de Gateaux (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v,\varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v,\cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v,\varphi) = \langle z, \varphi \rangle\ \forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el gradiente de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi)\,-\,DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v,\varphi,\psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) \;:=\; \int_\Omega (v^2 + v)\,dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0,1]$:

$$J((1-\beta)\,u + \beta\,v) \;\leq\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\,J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo $u, v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u - v) \,-\, DJ(v, u - v) \,\geq\, \alpha\, ||u - v||^2$$

y

$$J(v) \,\geq\, J(u) \,+\, DJ(u, v - u) \,+\, \frac{\alpha}{2}\, ||v - u||^2 \,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2 J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0, 1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) \,=\, J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2}\, D^2 J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi) \,.$$

61. Sea $(H, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V \,\} \,.$$

Demuestre que

$$H \,=\, V \,\oplus \mathcal{R}(V^o) \,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

62. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\, F(x_0)\,| \,\leq\, C_0$ para todo $F \,\in\, X'$ con $||F||_{X'} \,=\, 1$. Demuestre que $||x_0|| \,\leq\, C_0$.

63. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es simétrica, es decir

$$B(u, v) \,=\, B(v, u) \quad \forall\, (u, v) \in H \times H \,.$$

ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\, (u, v) \in H \times H.$$

iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\mathop{sup}_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{||v||_H} \geq C_2\, ||u||_H \quad \forall\, u \in H \,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H'}$.

64. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle)$ y defina

$$V^\perp := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\} \,.$$

Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^\perp = V^\perp$. Concluya que V es denso en Y sí y sólo sí $V^\perp = \{0\}$.

65. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

66. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu) .$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X , \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M . \end{aligned} \tag{11}$$

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u, \mu) \leq \mathcal{J}(u, \lambda) \leq \mathcal{J}(v, \lambda) \qquad \forall\, (v, \mu) \in X \times M . \tag{12}$$

Demuestre que (u, λ) es solución de (11) si y sólo si (u, λ) es solución de (12).

67. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall\, y \in Y ,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \, ||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{||x||_X} \geq \beta \, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} .$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \leq C \, \{ ||f|| + ||g|| \} .$$

Ind.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

68. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x-\bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \,\in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\;\{\, ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

69. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x{+}1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 \;:=\; \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \;\leq\; 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1,2\}$.

70. **a)** Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

    b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

71. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad & \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad & \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$.
Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx\,.$$

72. **a)** Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de HILBERT. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de HILBERT $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y $A = A^*$.

73. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

   a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

   b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.

   c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

74. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^\perp$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M, y el operador $P := X \to M$, $\quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.

ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.

75. **a)** Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

76. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\,\|v_n\|_H^2$ $\forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) = F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n\in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n\in H_n\\ w_n\neq 0}} \frac{|A(v_n,w_n) - A_n(v_n,w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

77. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\,dx = \min_{v\in S} \int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\,dx\,.$$

78. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\sup\limits_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \dfrac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \, \|q\|_Q \quad \forall \, q \in Q$, y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

79. (La condición inf-sup continua). Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) A es sobreyectivo.

   ii) $A^* : Y \to X$ es inyectivo y de rango cerrado.

   iii) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|A^*(y)\|_X \;\geq\; \alpha \, \|y\|_Y \qquad \forall \, y \,\in\, Y \,.$$

   iv) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle A(x), y \rangle_Y \,|}{\|x\|_X} \;\geq\; \alpha \, \|y\|_Y \qquad \forall \, y \,\in\, Y \,.$$

80. (Pseudo-inversa de Moore-Penrose). Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

   a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

   b) Defina $A_0 : V^\perp \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

   c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y.

81. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \;=\; \langle g, v \rangle_H \quad \forall \, v \in V \,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall \, v \in V \,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \;=\; F(v_h) \quad \forall \, v_h \in V_h \,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\,||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

82. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{14}$$

   a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (14) se reduce a: *Hallar* $(\sigma,(u,\varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) \,&=\, F(\tau) \quad \forall\,\tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) \,&=\, G((v,\psi)) \quad \forall\,(v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{15}$$

   donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,, \\ b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

   b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

83. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert COMPLEJO, y sean $u\,,\ v \,\in\, H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| \,=\, \|v\|$. Defina $w \,:=\, u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} \,:\, H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u,v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

   Qué sucede cuando H es un Hilbert REAL ? Interprete gráficamente.

84. Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{16}$$

   i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \,&=\, 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \,&=\, -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

85. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \;\ge\; \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q\in Q\,. \tag{18}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n\in\mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n\in\mathcal{L}(H,H_n)$ tal que

$$b(v-\mathcal{P}_n(v),q_n) \;=\; 0 \qquad \forall\, q_n\in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C>0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \;\le\; C$ para todo $n\in\mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^*>0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \;\ge\; \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n\in Q_n\,, \quad \forall\, n\in\mathbf{N}\,.$$

86. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0,p_1,...,p_n\}$ donde $p_0(x)=1$ y $p_i(x)=x_i$ $\forall\, i\in\{1,...,n\}$, $\forall\, x := (x_1,...,x_n)^{\mathbf{T}}\in\Omega$.

a) (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| \;:=\; \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \;+\; \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v,p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v\in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2>0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \;\le\; \|v\|_{H^2(\Omega)} \;\le\; C_2\,|||v||| \quad \forall\, v\in H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, n\in\mathbf{N}$ existe $v_n\in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\,|||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (Lema de Deny-Lions). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; \inf_{p\in P_1(\Omega)} \|v-p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\,[v]\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;\leq\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq\; C\, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in\, H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

87. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} \,:=\, \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j \,=\, \phi \quad \forall\, i \neq j$, y

iii) $\bar{\Omega} \,=\, \cup\,\{\,\bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\}\,\}$.

a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H \,:=\, \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, ..., N\}\,\}\,,$$

provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \,:=\, \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \,+\, \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
IND.: note que la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,=\, \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,.$$

En este caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \,\leq\, |\Omega|^{1/2}$ y

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \,-\, 1\,)\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

88. Sea $\Omega := (0,1)\times(0,1) \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega) \,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} : \ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\ \forall\, x := (x_1,x_2) \in \Omega;\ \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbf{R}\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\, x := (x_1,x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

89. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

   $$A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n,v_n) = F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

   $$\|u - u_n\|_H \leq C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n)\circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} + \|F \circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H_n'} \right),$$

   donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \in H_n$.

90. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un PROYECTOR si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

   a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

   b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) P es un proyector ortogonal.
   ii) $R(P) = N(P)^\perp$.
   iii) P es autoadjunto

   c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

91. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\;-\Delta u = f$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_\Omega u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx - \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx \qquad (19)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\,dx = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \qquad (20)$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx = -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega). \qquad (21)$$

De este modo, sumando (19), (20) y (21), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}, \qquad (22)$$

donde $A : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (22) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

IND.: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que

$$c\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \le |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

92. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\,B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

   a) Demuestre que $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

   $$X_{\mathtt{sim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = A \,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = -A \,\}.$$

   b) Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $c_{ij} = 1 \;\forall\, i \ge j$ y $c_{ij} = 0 \;\forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

93. (CLAUSURA DE OPERADORES). Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$.

94. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.

a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

$$\langle A(x), y\rangle \,=\, \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H :\ \text{existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle \,=\, \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

95. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 \,=\, \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \,=\, \|\mathbf{I}-\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:

a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 \,=\, \mathbf{Q}$. Pruebe que $S \,=\, R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I}-\mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s \in S$ que satisfacen $\langle p, q\rangle = \langle r, s\rangle = 1$, tales que

$$\mathbf{Q}(v) \,=\, \langle q, v\rangle\, p \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I}-\mathbf{Q})(v) \,=\, \langle s, v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

b) A partir de la identidad $v \,=\, \mathbf{Q}(v) \,+\, (\mathbf{I}-\mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\,\|q\|^2 \,=\, \|r\|^2\,\|s\|^2 \,=\, 1 \,-\, \langle p, r\rangle\,\langle q, s\rangle$ y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} \,=\, \|\mathbf{I}-\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| \,=\, 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(x)\| \,\leq\, \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \,=\, \|\mathbf{I}-\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

96. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} \,+\, \left(\int_\Omega v\,dx\right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, k \in \mathbf{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k\,|||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w \in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω.

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$- \Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega u\, dx \,=\, 0\,,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f\, dx = 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

97. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.

a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

b) Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := {}^\circ\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.

98. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) \,:=\, \Big\{\, \mathbf{x} := \{x_n\}_{n\in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p \,<\, +\infty \,\Big\}\,,$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\quad \|\mathbf{x}\| \,:=\, \left\{ \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $\ell_p(\mathbb{C})$ es separable.

99. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \to v \in V$ (resp. $v_n \stackrel{w}{\to} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \,\to\, J(v) \,\in\, \mathbf{R}\,.$$

a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U.

b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) \;=\; \min_{v\in U} J(v)\,.$$

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U.

c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V, y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) \;=\; \min_{v\in U} J(v)\,.$$

100. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert complejo y considere $H \times H$ provisto del producto escalar

$$\langle (u,v),(z,w)\rangle_{H\times H} \;:=\; \langle u,z\rangle_H \,+\, \langle v,w\rangle_H \qquad \forall\,(u,v)\,,\;(z,w)\,\in\, H\times H\,.$$

Además, dado $A \in \mathcal{L}(H,H)$, defina el operador $B : H\times H \to H\times H$ por

$$B((u,v)) \;:=\; (\imath\, A(v), -\,\imath\, A^*(u)) \qquad \forall\,(u,v)\,\in\, H\times H\,.$$

Demuestre que $\|B\| \;=\; \|A\|$ y que B es autoadjunto.

101. Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \to F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:

a) El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.

b) Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.

c) $R(T)$ es cerrado en F, y T es inyectivo.

102. Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\langle z,w\rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r,w\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w\,\in\, H^1(\Omega)\,.$$

b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta z \,+\, z \;=\; r \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla z\cdot\boldsymbol{\nu} \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \,\in\, L^2(\Omega)\,.$$

103. Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma uniforme

$$\|u\| \,:=\, \max\{\,|u(t)| : \quad t \,\in\, [0,1]\,\} \qquad \forall\, u \,\in\, X\,,$$

y dado $f \,\in\, X$, fijo, defina el funcional lineal $F \,:\, X \,\to\, \mathbf{R}$ como

$$F(u) \,:=\, \int_0^1 u(t)\,f(t)\,dt \qquad \forall\, u \,\in\, X\,.$$

Demuestre que $F \,\in\, X'$ y $\|F\| \,=\, \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Indicación: Para cada $n \,\in\, \mathbf{N}$ considere $x_n \,\in\, X$ dada por $x_n(t) \,:=\, u_n(f(t))$ $\forall\, t \,\in\, [0,1]$, donde $u_n \,:\, \mathbf{R} \,\to\, \mathbf{R}$ es la función continua

$$u_n(t) \,:=\, \begin{cases} \;\;1 & \text{si} \;\; t \,\geq\, 1/n\,, \\ -1 & \text{si} \;\; t \,\leq\, -1/n\,, \\ n\,t & \text{si} \;\; -1/n \,\leq\, t \,\leq\, 1/n\,, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\quad \|F\| \,\geq\, \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt \,-\, \frac{1}{n}$.

104. Dados $A \,\in\, \mathbf{R}^{m\times n}$ y $b \,\in\, \mathbf{R}^m$, $b \,\neq\, \mathbf{0}$, defina el conjunto solución

$$S(A,b) \,:=\, \{\, x \,\in\, \mathbf{R}^n : \quad A\,x \,=\, b\,\}\,.$$

Suponga que $S(A,b) \,\neq\, \phi$ y pruebe que existe $z \,\in\, \mathbf{R}^n$ tal que

$$\inf_{x\,\in\,S(A,b)} \langle z, x\rangle_{\mathbf{R}^n} \,>\, 0\,.$$

105. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \,\in\, \mathcal{L}(H,H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \to \mathbf{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S, y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $\quad a(v,v) \,\geq\, \alpha\,\langle v,v\rangle \qquad \forall\, v \,\in\, S$. Demuestre que $\Pi A \,:\, S \,\to\, S$ es una biyección lineal.

106. Sean U, V y W subespacios de un espacio de Hilbert H. Pruebe que

a) $(U^\perp)^\perp \,=\, \bar{U}$.

b) $(V \,+\, W)^\perp \,=\, V^\perp \cap W^\perp$.

c) $\overline{V^\perp \,+\, W^\perp} \,=\, (\overline{V} \cap \overline{W})^\perp$.

107. Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0,1] \to C[0,1]$ por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t,s)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [0,1]\,, \quad \forall\, u \in C[0,1]\,.$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

108. Este ejercicio debe resolverse sin aplicar el Teorema de Hahn-Banach, en ninguna de sus formas.

i) Sea S un subespacio de un espacio vectorial normado X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Construya explícitamente un funcional lineal y acotado $g : \bar{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in S$ y $\|g\|_{\bar{S}'} = \|f\|_S$.

ii) Sea S un subespacio de un espacio de Hilbert X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Demuestre que existe $F \in X'$ tal que $F(x) = f(x) \quad \forall\, x \in S$ y $\|F\|_{X'} = \|f\|_S$.

109. Sea S un subespacio cerrado propio de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ sobre el cuerpo $\mathbf{R}$. Aplique el Teorema de Hahn-Banach (segunda versión geométrica) para demostrar que existe $F \in X'$ tal que $F \neq \Theta$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in S$.

110. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $V_1, V_2, ..., V_N$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H, esto es $v_i \perp v_j \;\forall\, v_i \in V_i,\; \forall\, v_j \in V_j,\; \forall\, i \neq j$. Demuestre que $\mathbf{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \longrightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \cdots \cap V_N^\perp$ y $\mathbb{P}_j : H \longrightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.

111. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ sobre $\mathbf{R}$ con el producto escalar $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, donde

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}\, \tau_{ij} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})_{n\times n}\,, \quad \boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{n\times n} \in V\,.$$

A su vez, defina el subespacio $U := \{\, \alpha\, \mathbb{A} + \beta\, \mathbb{B} : \quad \alpha\,, \beta \in \mathbf{R} \,\} = \langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}\, \rangle$, donde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n\times n}$ y $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n\times n}$ están definidos por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i-1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}\,.$$

Encuentre $U^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y $U^\perp$. Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbf{I}\}\, \rangle$, donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de V ?

112. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)_2$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con normas inducidas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente, y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1$ $\forall\, x \in H_1$. Demuestre que $\langle T(x), T(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x,\, y \in H_1$.

Ind. Considere las expresiones nulas $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ y $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$.

113. Sea $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} : \ u_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \ < \ \infty \right\}$, provisto del producto escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, \bar{v}_n \quad \forall \, \mathbf{u}, \, \mathbf{v} \ \in \ \ell_2(\mathbb{C})$. Demuestre que $(\ell_2(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

114. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demuestre que

   i) $R(A)^\circ \ = \ N(A')$ ii) ${}^\circ R(A') \ = \ N(A)$

   Además, indique a que se reducen estas identidades (y pruébelas) cuando X e Y son espacios de Hilbert y A' se reemplaza por A^*.

115. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por $A(u) \ := \ \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall \, u \ \in \ H^1(\Omega)$, donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

116. Sea $X \ := \ C[0,1]$ provisto de la norma uniforme, y sean $\{p_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, $\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}} \ \subseteq \ X$ tales que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s)\, q_j(t)$ converge uniformemente a una funcion continua $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, es decir

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} \left| K(s,t) \ - \ \sum_{j=1}^{N} p_j(s)\, q_j(t) \right| \right\} \ = \ 0 \, .$$

   A su vez, sea $F_j \in X'$ definido por $F_j(u) \ := \ \int_0^1 q_j(t)\, u(t)\, dt \quad \forall \, u \in X$. Pruebe que para todo $G \in X'$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j)\, F_j$ es convergente en X'. Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.

117. Sea $\Omega \ :=]0,1[^2 \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{rot};\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \ := \ \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v \ := \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \ - \ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \ \in \ L^2(\Omega) \right\}$$

   y

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \ := \ \int_\Omega v \cdot w \, dx \ + \ \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \ \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall \, v, \, w \in H(\mathrm{rot};\Omega) \, .$$

   Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{rot};\Omega)$ dado por

$$S := \{ \boldsymbol{\tau} : \ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_2, \beta - \gamma\, x_1) \ \forall \, x := (x_1, x_2) \ \in \ \Omega; \ \text{con } \alpha, \, \beta, \, \gamma \ \in \ \mathbf{R} \} \, .$$

   Encuentre $S^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre S y $S^\perp$.

118. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ por $A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Delta u \, \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^2(\Omega)$, donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

119. (La condición inf-sup continua). Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) A es sobreyectivo.

   ii) $A^* : Y \to X$ es inyectivo y de rango cerrado.

   iii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\|A^*(y)\|_X := \sup\limits_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \dfrac{|\langle A(x), y\rangle_Y\,|}{\|x\|_X} \;\geq\; \alpha\,\|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y$.

   iv) Existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $A\,B = I$ en Y y $B\,A = I - P$ en X, donde $P : X \to N(A)$ es el proyector ortogonal.

120. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{23}$$

   i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (23) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{24}$$

   ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema: $\Delta z = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en Ω, $z = 0$ en Γ. Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que

$$H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I - P)(H(\mathrm{div};\Omega))\,.$$

   iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (24) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{25}$$

   donde

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := -\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_\Omega \mathrm{div}\,P(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau})\,,$$

$$K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := 2\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau})\,,$$

   y F es el funcional definido por el lado derecho de (24).

iv) Sean $\mathbf{A} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K, respectivamente. Demuestre que $\mathbf{A}$ es biyectivo y que $\mathbf{K}$ es compacto.

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.

121. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^{o}W$ tal que $F(x) \neq 0$.

a) Pruebe que si X es reflexivo y W es un subespacio cerrado de X', entonces W es saturado.

b) Pruebe que un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^{o}W)^{o}$.

Un subconjunto W de X' se dice DÉBILMENTE* CERRADO si el límite de toda sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de W que converge débilmente *, pertenece a W.

c) Pruebe que si un subespacio W de X' es saturado entonces él es débilmente* cerrado.

122. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{L}(H,H)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un VALOR PROPIO de A si existe $x \neq \theta$ tal que $Ax = \lambda x$.

a) Pruebe que $|\lambda| \leq \|A\|$.

b) Pruebe que si A es autoadjunto, entonces $\lambda \in \mathbf{R}$.

c) Pruebe que si A es autoadjunto, y $\mu \neq \lambda$ es otro valor propio de A, entonces $N(\lambda\mathbf{I} - A) \perp N(\mu\mathbf{I} - A)$.

123. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.

124. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

GNG/gng